1)

Να υπολογισθεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_{\widehat{AB}} \frac{dx}{xy^2} + \frac{dy}{x^2 y}$$, όπου $\widehat{AB}$ είναι τόξο της καμπύλης

με παραμετρικές εξισώσεις $\begin{cases} x=\sqrt{t},\ y=\sqrt{t+1},\ t\in[1,4], \\ A=(1,\sqrt{2}),\ B=(2,\sqrt{5}) \end{cases}$

Λύση:

$$I = \int_1^4 \frac{d(\sqrt{t})}{\sqrt{t}(t+1)} + \int_1^4 \frac{d(\sqrt{t+1})}{t\sqrt{t+1}}$$

$$= \int_1^4 \frac{dt}{\sqrt{t}(t+1)2\sqrt{t}} + \int_1^4 \frac{dt}{t\sqrt{t+1}\,2\sqrt{t+1}}$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^4 \left(\frac{1}{t(t+1)} + \frac{1}{t(t+1)}\right) dt = \int_1^4 \frac{1}{t(t+1)}\, dt$$

Αλλά, $\frac{1}{t(t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} \iff A(t+1) + Bt = 1$

$\iff (A+B)t + A = 1 \iff \begin{cases} A+B=0 \\ A=1 \end{cases} \iff A=1,\ B=-1$, άρα

$$I = \int_1^4 \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right) dt = \left(\ln t - \ln(t+1)\right)\Big|_1^4 = \ln\left(\frac{t}{t+1}\right)\Big|_1^4$$

$$= \boxed{\ln\left(\frac{8}{5}\right)}$$

2]

Σωματίδιο κινείται προς τα πάνω κατά μήκος κυκλικής έλικας C με παραμετροποίηση $\bar{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$, και εφαρμόζεται πάνω σ' αυτό μια δύναμη $\bar{F}(\bar{r}) = (-zy, zx, xy)$. Υπολογίστε το έργο της $\bar{F}$ για την κίνηση αυτή.

Λύση $\displaystyle\int_C \bar{F} \cdot d\bar{r} = \int_0^{2\pi} \left[(-t\sin t)(-\sin t) + (t\cos t)\cos t + (\sin t \cos t)\right] dt$

$$= \int_0^{2\pi} (t + \sin t \cos t)\, dt = \int_0^{2\pi} \left(t + \frac{1}{2}\sin(2t)\right) dt = \boxed{2\pi^3 \text{ μονάδες έργου.}}$$

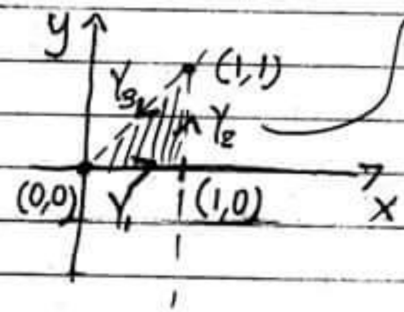
3]

Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_C y^2dx + x^2dy$,

όπου C είναι το τρίγωνο πλευρών $x=1,\ y=0,\ y=x$

με τη θετική φορά.

Λύση:



$\gamma_1(t) = (0,0) + t(1,0) = (t,0)$, $t \in [0,1]$

$\gamma_2(t) = (1,0) + t(0,1) = (1,t)$, $t \in [0,1]$

$\gamma_3(t) = (1,1) + t(-1,-1) = (1-t, 1-t)$, $t \in [0,1]$

, με $C = \gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus \gamma_3$, $t \in [0,1]$, (γ_i κανονικές και C^1)

Είναι:

$$\int_C y^2dx + x^2dy = \int_{\gamma_1} y^2dx + x^2dy + \int_{\gamma_2} y^2dx + x^2dy + \int_{\gamma_3} y^2dx + x^2dy$$

$$= \int_0^1 0^2\,dt + t^2\,0 + \int_0^1 t^2\cdot 0 + 1^2\,dt + \int_0^1 (1-t)^2(-dt) + (1-t)^2(-dt)$$

$$= \int_0^1 dt - 2\int_0^1 (1-t)^2dt = t\Big|_0^1 - 2\left(t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \boxed{\frac{1}{3}}$$

Να δειχθεί ότι η καμπύλη με εξίσωση

$\bar{r}(t) = (\cos(t), \sin(t), \lambda)$, έχει σταθερό μέτρο, ενώ η καμπύλη με εξίσωση

$\bar{r}_1(t) = \left(t^2, \frac{2t^2}{3}, \frac{3t^2}{4}\right)$, έχει σταθερή διεύθυνση.

Λύση:

Σχω. $\|\bar{r}(t)\| = \sqrt{\cos^2(t) + \sin^2(t) + \lambda^2}$

$= \sqrt{1+\lambda^2}$ = σταθερά

Επιπλέον, $\bar{r}_1$ έχει σταθερή διεύθυνση αν και μόνο αν ισχύει

$$\bar{r}_1(t) \parallel \bar{r}_1'(t), \ \forall t$$

$$\Leftrightarrow \bar{r}_1(t) \times \bar{r}_1'(t) = 0, \ \forall t$$

, δηλαδή $\begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ t^2 & \frac{2t^2}{3} & \frac{3t^2}{4} \\ 2t & \frac{4t}{3} & \frac{6t}{4} \end{vmatrix} = 0$, που ισχύει.

Επειδή έχω κίνηση ανάθετη των δεικτών του ρολογιού, η γωνία $\theta(t)$ αυξάνει, συνεπώς

$\theta'(t) > 0$, άρα:

$$u = \rho \cdot \theta'(t) \Rightarrow \theta(t) = \frac{u \cdot t}{\rho} + c$$

και επειδή για $t=0$ έχω $\theta(0) = 0$, παίρνω $c=0$, και τελικά:

$$\theta(t) = \frac{u \cdot t}{\rho}$$, και η εξίσωση κίνησης

γίνεται:

$$\bar{r}(t) = \rho\left(\cos\left(\frac{ut}{\rho}\right), \sin\left(\frac{ut}{\rho}\right)\right)$$

Παραγωγίζοντας την, παίρνω:

$$\bar{v}_{(t)} = \bar{r}'(t) = \left(-u\sin\left(\frac{ut}{\rho}\right), u\cos\left(\frac{ut}{\rho}\right)\right)$$

και $\bar{\alpha}_{(t)} = \bar{r}''(t) = \bar{v}'(t) = -\frac{u^2}{\rho^2}\bar{r}(t)$,

με την επιτάχυνση $\bar{\alpha}(t)$ να είναι αντίρροπη της $\bar{r}(t)$.

Αντικείμενο κινείται σε κύκλο ακτίνας ρ με φορά αντίθετη των δεικτών του ρολογιού και ταχύτητα $\vec{v}$ σταθερού μέτρου u.

Νδο:

Η θέση του αντικειμένου δίδεται από την εξίσωση:

$$\bar{r}(t) = (x(t), y(t)) = \rho\left(\cos\left(\frac{ut}{\rho}\right), \sin\left(\frac{ut}{\rho}\right)\right)$$

, και να υπολογισθούν τα διανύσματα της ταχύτητας και της επιτάχυνσής του.

Λύση:

Εφόσον η κίνηση γίνεται πάνω σε κύκλο ακτίνας ρ, οι παραμετρικές εξισώσεις της είναι της μορφής:

$$\bar{r}(t) = (\rho\cos(\vartheta(t)), \rho\sin(\vartheta(t))).$$

Τότε $\bar{r}'(t) = (-\rho\sin(\vartheta(t))\vartheta'(t), \rho\cos(\vartheta(t))\vartheta'(t))$

κι εφόσον η κίνηση γίνεται με σταθερή ταχύτητα έχω:

$$u = \|\bar{r}'(t)\| = \sqrt{\rho^2\cos^2(\vartheta(t))\vartheta'(t)^2 + \rho^2\sin^2(\vartheta(t))\vartheta'(t)^2}$$

$$\Rightarrow u = \rho\,\|\vartheta'(t)\|$$

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα:

$$I = \int \left[\left(\tan(t), 2\pi t, \frac{4}{1+t^2}\right)\right] dt,$$

όπου

$$\bar{\gamma}(t) = \left(\tan(t), 2\pi t, \frac{4}{1+t^2}\right)$$

Λύση: $\bar{\gamma}(t)$ συνεχής, άρα και ολοκληρώσιμη

$$\Rightarrow I = \left(\int \tan(t)\,dt, \int 2\pi t\,dt, \int \frac{4}{1+t^2}\,dt\right)$$

$$= \left(\int \frac{\sin(t)}{\cos(t)}\,dt, 2\pi\int t\,dt, 4\int \frac{1}{1+t^2}\,dt\right)$$

$$= \left(-\ln|\cos(t)| + c_1, \pi t^2 + c_2, 4\arctan(t) + c_3\right)$$

Να εξεταστεί αν υπάρχει σημείο P της καμπύλης

$$\bar{r}(t) = \left(1-2t,\ t^2,\ 2e^{2(t-1)}\right),$$

ώστε το εφαπτόμενο διάνυσμα αυτής στο P να είναι παράλληλο με το διάνυσμα θέσης στο P.

Λύση: Έχω: $\bar{r}'(t) = \left(-2,\ 2t,\ 4e^{2(t-1)}\right)$.

Το εφαπτόμενο διάνυσμα είναι παράλληλο με το διάνυσμα θέσης, αν και μόνο αν

$\bar{r}(t) \times \bar{r}'(t) = 0$, δηλαδή

$$\begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ 1-2t & t^2 & 2e^{2(t-1)} \\ -2 & 2t & 4e^{2(t-1)} \end{vmatrix} = 0,$$ όπου $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ η κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4te^{2(t-1)}(t-1) = 0 \\ 4e^{2(t-1)}(1-2t+1) = 0 \\ 2t(1-2t+t) = 0 \end{cases} \Longrightarrow t=1$$

, άρα $P = \bar{r}(1) = (-1, 1, 2)$.